155. 共軛計量Riemann空間に就て〔VII〕

京都师範　田畑 不二夫

□8.2. 更めて．$F(u^\lambda, \dot{u}^\lambda) \equiv F$（$\frac{du^\lambda}{dt} \equiv \dot{u}^\lambda$, t : parameter, F : $\dot{u}^\lambda$ に関する m 次同次式）と $\frac{\partial F}{\partial \dot{u}^\lambda}(u^\lambda, \dot{u}^\lambda) = C p_\lambda$, $G(u^\lambda, p_\lambda) = 0$ より $\frac{\partial G}{\partial p_\lambda} = \frac{\partial F}{\partial \dot{u}^\alpha}\frac{\partial \dot{u}^\alpha}{\partial p_\lambda}$（$m \neq 1$ とすれば）$= \frac{1}{m-1}\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}^\alpha \partial \dot{u}^\beta}\dot{u}^\beta \frac{\partial \dot{u}^\alpha}{\partial p_\lambda}$（之に $\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}^\lambda \partial \dot{u}^\alpha}\frac{\partial \dot{u}^\alpha}{\partial p_\mu} = S_{\lambda\mu} C$ を用いて）$= \frac{C}{m-1}\dot{u}^\lambda$ ∴ 又 $\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}^\lambda \partial \dot{u}^\alpha}\frac{\partial \dot{u}^\alpha}{\partial u^\mu} = \frac{\partial C}{\partial u^\mu} p_\lambda$ を用いて）$= \frac{\partial F}{\partial u^\lambda} + \frac{1}{m-1}\left(\frac{\partial C}{\partial u^\lambda} p_\alpha - \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}^\alpha \partial u^\lambda}\right)\dot{u}^\alpha = \frac{-1}{m-1}\frac{\partial F}{\partial u^\lambda} + \frac{1}{m-1}$

$\left(\frac{\partial F}{\partial u^\lambda} p_a - \frac{\partial^2 F}{\partial u^a \partial u^\lambda}\right) \dot{u}^a = \frac{-1}{m-1}\frac{\partial F}{\partial u^\lambda} + \frac{1}{m-1}\frac{\partial F}{\partial u^\mu} p_a \dot{u}^a = \frac{-1}{m-1}\frac{\partial F}{\partial u^\lambda}$
$+ \frac{m}{m-1}\frac{\partial C}{\partial u^\lambda}\frac{F}{C} =$ （$F=0$ を用いて）$\frac{\partial F}{\partial u^\lambda}\frac{-1}{m-1}$　以上を $du^\lambda / \frac{\partial C}{\partial p_\lambda}$
$= - dp_\lambda / \frac{\partial C}{\partial u^\lambda}$　（□8.）に用ふれば $\frac{du^\lambda}{Cu^\lambda} = \frac{dp_\lambda}{\partial F/\partial u^\lambda}$ ∴ $\frac{dp_\lambda}{dt} = \frac{1}{c}$

$\frac{\partial F}{\partial u^\lambda}$ 之に $p_\lambda = \frac{\partial F}{\partial u^\lambda}\frac{1}{c}$ を用いて結局 $F=0$ 條件下の測地曲線の方程式

として (1)…　$=\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial u^\lambda} - \frac{\partial F}{\partial u^\lambda}\right) / \frac{\partial F}{\partial \dot{u}^\lambda} = \cdots$，$F=0$ を得る（之は

$m=1$ なるときも成立す ∵ $F^2 = \bar{F}$ と置けば $\bar{m}=2$ なる故 $\bar{F}$ に

対する (1) を解く之より F に対する (1) を導く事が出来るからである）

□ 8.3. $\sqrt[m]{F(u^\lambda, du^\lambda)} = d\sigma$ を用いれば (1) は (2) $\frac{d}{d\sigma}\frac{\partial F}{\partial u^{\lambda'}}$

$- \frac{\partial F}{\partial u^\lambda} = 0.$ $F=0$（$F \equiv F(u^\lambda, u^{\lambda'})$, $u^{\lambda'} \equiv \frac{du^\lambda}{d\sigma}$）なる零測地

線型を除る．　若 (1) の各辺を $f(t)$ と置いて $\frac{(m-1)\ddot{\sigma}}{\dot{\sigma}} = f(t)$ なる σ を

parameter に採れば $m \neq 1$ なるときは (1) は (2) の形を採り (2) の

両辺に $u^{\lambda'}$ を縮約すれば $F=$ 常数となる．然るに $F \equiv F(u^\lambda, u^{\lambda'}) =$
$\frac{F(u^\lambda, du^\lambda)}{(d\sigma)^m}$ なる事を用ふれば　$d\sigma = \sqrt[m]{F(u^\lambda, du^\lambda)}$ とすれば好い事

が判る．（$m=1$ のときは $F^- \equiv F$ と置いて之に応ずる (2) の式から F に

対する (2) を導く事が出来る）

□ 24.3.　$n=1$ を用ふれば $\frac{d}{dt}\frac{\partial n}{\partial \dot{u}^l} - \frac{\partial n}{\partial u^l} = \frac{\partial n}{\partial t}\frac{\partial n}{\partial \dot{u}^l}$ となるが．
之は □ 8,2. に於ける $F = n(u^\lambda, \dot{u}^l) - \dot{u}^0$, $\dot{u}^0 = 1$ とした場合に当

ってゐる。
□ 39.　$S^n_{lm} = \frac{\partial S^n_{lm}}{\partial t} = (\text{Tensor})^n_{lm}$ であって Levi-Civita の
平行性が 時間 t の経過に対して保存される為の完全條件は $\underline{S^l_{ln}} = 0$ なる事で
ある（□ 39. 2.）．
　従って Tensor $\underline{S^n_{lmp}} \equiv \frac{\partial}{\partial t} S^n_{lmp} = 0$ は その必要條件である。

□ 35.2.　$A^l_{my} = S^l_{my} + \frac{1}{2} S^{la}\left(\frac{\partial U_m}{\partial u^a} - \frac{\partial U_a}{\partial u^m}\right) t_0$ として
$\frac{\delta \cdot U_\lambda}{\delta t} = \frac{\partial \cdot U_l}{\partial t} - A^a_{l0}(-U_a)$ に $\frac{\partial S_{lm}}{\partial t} + U_{l;m} + U_{m;l} = 0$
を用ふれば $= -\frac{\partial U_l}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial S^{al} U_a U_l}{\partial u^l}$ となり 是は U^λ に附随する

部計量基準空間 $\mathfrak{N}$ より見た固有点（流体点）の加速度を表してみる.

□ 6.3.1.2. $\mathfrak{D}_U = \mathfrak{D} = \frac{d}{dt} = \frac{du^\lambda}{dt}\frac{\partial}{\partial u^\lambda} = U^\lambda \frac{\partial}{\partial u^\lambda}$ とすれば $\mathfrak{D}(S_{lm}V^lV'^m) = \left(\frac{\partial S_{lm}}{\partial u^\lambda}U^\lambda + S_{l\kappa}\frac{\partial U^\kappa}{\partial u^m} + S_{m\kappa}\frac{\partial U^\kappa}{\partial u^l}\right)V^lV'^m$ $\equiv A_{lm}V^lV'^m$ （但 $A_{lm} = \frac{\partial S_{lm}}{\partial t} + U_{l;m} + U_{m;l}$ にて $U^\lambda = t^\lambda$ の時 $A_{lm} = \underline{S_{lm}} \equiv \frac{\partial S_{lm}}{\partial t}$）であって 長さの変化 は $\mathfrak{D}(\sqrt{S_{lm}V^lV^m}) = \frac{1}{2}A_{lm}V^lV^m/\sqrt{S_{lm}V^lV^m}$ 一般に $S_{lm}V^lV'^m$ の函数の形の Scalar の変化 $\mathfrak{D}$ は $S_{lm}V^lV'^m$, $A_{lm}V^lV'^m$ の函数の形となり 演算 $\mathfrak{D}$ は恰かも V^l, V'^l を常数と見た時の微分 Operater の如き作用を持つ. 例えば $V^l_{(1)}, \cdots\cdots V^l_{(r)}$ を稜とする r 次元平行 $2r$ 面体 の体積 V_r の変化 $\mathfrak{D}V_r = \mathfrak{D}\sqrt{\frac{1}{(r!)^2}|S_{i_1h_1}\cdots S_{i_rh_r}||V^{i_1}_{(1)}\cdots V^{i_r}_{(r)}||V^{h_1}_{(1)}\cdots V^{h_r}_{(r)}|} = \frac{1}{2V_r}\frac{1}{(r!)^2}\sum_{i,h} A_{ih}S^{ih}|V^{i_1}_{(1)}\cdots V^{i_r}_{(r)}||V^{h_1}_{(1)}\cdots V^{h_r}_{(r)}|$

（S^{ih} は $|S_{i_1h_1}\cdots\cdots S_{i_rh_r}|$ に関する S_{ih} の余因数）となる.

考ふる u^λ に於て 質量（空間）Vector n 個が直交単位 Vector 系を作る様に 座標系を択べば 上の n 個の中の 任意の相異る r 個から出来る V_r について $\mathfrak{D}V_r = 0$ と置けば 今の座標系 に於ては $\sum^r A_{ii} = 0$ 之等は任意の $\binom{n}{r}$ 個の場合に成立つから 若し $1 \leq r \leq n-1$ なる時は $A_{11}, \cdots\cdots, A_{nn} = 0$ ∴ 座標系 が更に A_{lm} が標準型を採るように択ばれてゐるならば $A_{lm} = 0$ 即 運動とは同等なる事が判る（□ 6.3.）. $r = n$ なる時は $\mathfrak{D}V_n/V_n = \frac{1}{2}A_{lm}S^{lm} = \frac{\partial U^a}{\partial u^a} + S^a_{a\lambda}U^\lambda = U^l_{;l} + S^l_{l0}$ となる

（□ 6.3.）

□ 15.2. x^l Euclid 空間中で速度が $t^l(x^\lambda)$ なる流体を 共軛計量の Riemann 空間と見た時の共軛計量は $dt = dx^0$, $ds^2 = (t^l dx^0 - t^0 dx^l)^2$; $x^0 \equiv t$, $t^0 = 1$, である. 即 $S_{00} = t^lt^l$, $S_{l0} = -t^l$, $S_{lm} = \delta_{lm}$, $t_l = 0$. $t_0 = 1 = t^0$; $S^{00} = S^{l0} = 0$, $S^{lm} = \delta^{lm}$

□ 39.2. $$\frac{\frac{d^2u^l}{dp^2} + S^l_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{dp}\frac{du^\beta}{dp}}{\frac{du^l}{dp}} = \frac{\frac{d^2u^m}{dp^2} + S^m_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{dp}\frac{du^\beta}{dp}}{\frac{du^m}{dp}}$$

なる測地線は 時間 dt 後には S^{ℓ}_{ab} が $S^{\ell}_{ab} + \underline{S^{\ell}_{ab}}\, dt$ となる事から．測地線が保存される為の 完全条件として

$$\underline{S^{\ell}_{ab}}\,\frac{du^{a}}{dp}\frac{du^{b}}{dp}\frac{du^{m}}{dp} = \underline{S^{m}_{ab}}\,\frac{du^{a}}{dp}\frac{du^{b}}{dp}\frac{du^{\ell}}{dp} \quad (\ell \neq m)$$

之より係数を比較して S_{23}．$S_{22} = 0$，$2S^{2}_{12} = S^{1}_{11}$ 等を得る 勿論 此の性質は座標変換に対して保存される（$S^{1}_{11} \equiv A_{1} = 2B_{1} \equiv 2S^{2}_{12}$ 等とすれば A_{i}，B_{i} は夫々 共変 Vector の変換を受ける事が判る）

□ 40. 変形する事なしで 延形展（収縮）する（例えば 各点では 等方的な曲面が 一様に膨張する）事の完全条件は $\underline{S_{\ell m}} / S_{\ell m} = \mathrm{Scalar}$（$= 2\alpha$ とする：線容素係数）なる事である。

（□ 20.） 此時 $S_{\ell m} = C(t)\, B_{\ell m}(u^{\ell})$ なる Scalar と Tensor の積に分解され，$\underline{S^{\ell}_{mn}} = \delta^{\ell}_{m}\frac{\partial \alpha}{\partial u^{n}} + \delta^{\ell}_{n}\frac{\partial \alpha}{\partial u^{m}} - S_{mn}\, S^{\ell i}\frac{\partial \alpha}{\partial u^{i}}$

$S^{m}_{\ell m} = n\frac{\partial \alpha}{\partial u^{\ell}}$（$n$：次元数）から線素係数が一定なる超曲面が与えられる。

上の関係及 □ 39.2. から 等方的なる時は 測地線（凡ての）保存と変形が巨視的に相伴い 即 $\frac{\partial \alpha}{\partial u^{\ell}} = 0$ なる事とは全等なる事が判る。

□ 41. 等方的なる時 α = 常数なる測地面には (1)

$\ddot{u}^{\ell} + S^{\ell}_{mn}\,\dot{u}^{m}\dot{u}^{n} + \alpha\dot{u}^{\ell} = 0$ となる（□ 24.2.）

時刻 $t_{(0)}$ に於ける可変計量 Riemann 空間 $R(t_{(0)})$ に於ける (1) の路を $u^{\lambda} = u^{\lambda}(p)$，$p$:rameter とし更に．$s = \int\sqrt{S_{\ell m}(t_{(0)}, p)\frac{du^{\ell}}{dp}\frac{du^{m}}{dp}}\,dp$

（Sの方は $= \int\sqrt{S_{\ell m}(t)\,\dot{u}^{\ell}\dot{u}^{m}}\,dt$ である事に注意）を parameter に採れば (1) は $u^{\ell\prime\prime} + S^{\ell}_{mn}\,u^{m\prime}u^{n\prime} + u^{\ell\prime}\frac{\ddot{s} + \alpha\dot{s}}{\dot{s}^{2}} = 0$．之に

$S_{\ell a}\,u^{a\prime}$ を乗じて $\alpha\dot{s} + \ddot{s} = 0$（$\therefore \dot{s} = e^{-\int\alpha(t)dt}$）従って結局 (1) は $u^{\ell\prime\prime} + S^{\ell}_{mn}\,u^{m\prime}u^{n\prime} = 0$ となる。

以上から 等方的に運動する空間中に於ける定速測地線上の変位は恰かも各瞬間 (t) 其の測地線上を変位する如く経過する事が判る。

□ 42. 定速測地線を (C) とし その随伴超曲面（□.8）に当るものを (B) とすれば $u^{\lambda\prime}$ で (C)，(B) の 切超平面を表す共変 Vector は

$\frac{1}{r} S_{la} \frac{du^a}{ds} - t_0$ である. 之の上にある u^λ を端とする Vector を A^λ とする. $A' = \Delta x'$, A^2, ……, $A^n = 0$ とした時の A^λ 方向への偏微分 $\frac{\Delta}{\Delta u^\lambda}$ (□25.) は $\frac{\partial}{\partial u^\lambda} + (\frac{1}{r} S_{la} \frac{du^l}{ds} - t_0) \frac{\partial}{\partial t'}$ である事が判る. 従つて (B)上で S^l_{mn} に当るものは $_\Delta S^l_{mn} = \frac{1}{2} S^{la} (\frac{\Delta S_{am}}{\Delta u^n} + \frac{\Delta S_{an}}{\Delta u^n} - \frac{\Delta S_{mn}}{\Delta u^a})$ であつて, 定速測地線は $S = 0$ に注意して

$$\frac{d^2 u^l}{ds^2} + {}_\Delta S^l_{mn} \frac{du^m}{ds} \frac{du^n}{ds} = 0$$ の形に書ける事から (□26.)

結局 定速測地線は 即 (B)上の 測地線 であると 極言する 事が出来るであろう. (昭24.3.25.)

注意　　前報告 [VI] 以後は田畑正二夫 : 可変計量 Riemann 空間論の方法, 日本数学会「数学」(予定) を参照せられたい.